

# 图象重建中的最优化方法

孙晓安 陈淑珍 吴志斌 柴亚萍

(武汉大学电子信息学院, 武汉 430072)

**摘要** 首先讨论了投影数据零空间对重建结果的影响, 分析了代数重建算法(ART)的收敛过程以及对不完全投影数据 ART 方法的重建结果, 针对投影数据不完备约束的问题, 将统计物理学中的模拟退火方法引入 ART 的迭代过程中, 根据对图象像素间连续性的假设, 引入最平稳解约束, 并利用模拟退火方法得到最优。

**关键词** 零空间 图象重建 代数重建算法 模拟退火

图象重建是由在某种观测方式下得到的携带图象信息的数据恢复出原图象的过程。在本文的讨论中, 假设观测模型都是线性的, 对于非线性的观测, 在处理过程中也总是力图把问题线性化。对于客观世界所存在的各种信号, 其本质上既有连续的也有离散的, 大多数的观测系统只能提供离散的观测数据, 图象重建的工具计算机也只能处理有限范围的离散信号。因此本文讨论的对象是离散观测系统下的离散信号。

## 1 观测矩阵 $A$ 的零空间

假定原信号是 Hilbert 空间  $H$  中的线性子空间  $K^n$  中的  $n$  维矢量  $x$ , 观测信号则是空间  $H$  中的线性子空间  $K^m$  的一个  $m$  维矢量  $y$ , 观测过程可描述为线性算子  $A: x \rightarrow y$

$$y = Ax \quad (1)$$

图象重建的问题就是在由观测系统所决定的已知算子  $A$  的情况下, 从  $m$  维观测矢量  $y$  求出  $n$  维空间的原信号  $x$ 。  $A$  可以表示成一个  $m \times n$  的矩阵。  $n$  和  $m$  可能是不同的, 如果  $m < n$ , 则一般来说这种观测方式使得观测信号的信息量少于原信号, 即在观测过程中丢失了原信号的部分信息, 仅从式(1)是无法完全重建原信号的; 如果  $m > n$ , 并不表示观测信号  $y$  的信息量大于原信号, 这时的问题要复杂得

多<sup>[1]</sup>。

式(1)表示了在无观测噪声时从信号  $x$  到观测信号  $y$  的过程, 称之为正问题(Direct problem); 反之, 在给定观测矩阵  $A$  的条件下, 通过观测信号  $y$  来复原和重建原信号  $x$ , 则是一个逆问题(Inverse problem)。如果观测信号与原信号之间是一一对应的, 则这种重建是没有问题的, 实际情况一般都远非如此简单, 观测矩阵  $A$  的零空间(Null space)就是破坏这种一一对应的主要原因之一。

观测矩阵  $A$  是由观测系统完全确定的<sup>[2]</sup>。信号空间  $K^n$  中一些矢量被  $A$  映射到观测空间  $K^m$  中成为零矢量:  $Ax=0$ 。定义  $A$  的零空间为上述所有  $x \in K^n$  的集合, 记为  $N(A) = \{x \in K^n: Ax=0\}$ 。由于零空间的存在, 在信号空间  $K^n$  和观测空间  $K^m$  之间由算子  $A$  所建立的映射关系就不存在一一对应关系。如果存在关系  $y_1 = Ax_1$ , 由于零空间任意矢量  $x_0$  都满足  $Ax_0=0$ , 则  $y_1 = A(x_1 + x_0)$  也成立, 即观测值  $y_1$  在信号空间所能找到的对应信号不只是一个  $x_1$ , 而是  $x_1$  与零空间任意矢量之和的全体, 这样就无法唯一地重建原信号。

对于由投影数据进行图象重建, 观测矩阵  $A$  的零空间可能由于以下几种原因产生: (1) 在某些角度上无法采集到投影数据, 使投影角度覆盖范围小于  $180^\circ$ ; (2) 被观测物体内存在对探测媒介不透明的物体; (3) 投影射线的覆盖范围不能包含整个被观测物

体。这种情况称为由不完全投影数据进行图象重建。由于零空间的存在使得可行解不唯一。

## 2 不完全投影数据的图象重建方法

目前图象重建的方法主要分为2类<sup>[3]</sup>:变换法(如滤波反投影法)和迭代法(如代数重建法),也可将这2种方法结合起来得到一种迭代重建法,如迭代的滤波反投影法。

### 2.1 滤波反投影法(FBP)

这种方法基于投影切片定理,物体的一个截面 $f(x, y)$ 可以由该截面的一系列投影数据计算出来,这些投影是在不同的角度 $\theta$ 和位置 $t$ 下取得的。对某一个角度 $\theta$ ,有在各个不同的位置 $t$ 下沿投影路径 $l$ 的投影观测数据 $p(\theta, t)$

$$p(\theta, t) = \int_l f(x, y) dl \quad (2)$$

对 $t$ 作 Fourier 变换,有

$$P(\theta, \omega) = \int p(\theta, t) e^{-j\omega t} dt \quad (3)$$

这样就得到了 $f(x, y)$ 的二维 Fourier 变换的极坐标形式。 $f(x, y)$ 可由下式得到

$$f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int d\theta \int P(\theta, \omega) e^{j\omega(x\sin\theta - y\cos\theta)} |w| dw \quad (4)$$

该方法对于完全投影数据是一种迅速而有效的方法,但是对于视角受限这样一种不完全投影数据, $P(\theta, \omega)$ 中受限角度对应的频谱分量为空。直接由式(4)求出的 $f(x, y)$ 必然为降质信号。

### 2.2 迭代重建法(IRA)

将角度受限投影数据用 FBP 算法得到一个重建结果,用此结果计算出二维频谱 $Q(\theta, \omega)$ 。令 $P(\theta, \omega)$ 中已知的频谱分量不变,受限角度对应的频谱分量由 $Q(\theta, \omega)$ 中的对应分量代替,这样得到一个新的二维频谱 $P_r(\theta, \omega)$ ,代入式(4)得到新的重建结果。将此过程重复迭代进行,直到得到所需精度的结果或收敛步长小于设定值。在迭代过程中,可加入各种已知的先验知识作为约束条件,以保证迭代的收敛性并得到较好的重建结果。上述过程可表示为

$$f_{k+1} = C_l R C_p (P_0 + P_m f_k) \quad (5)$$

$f_k$ 为第 $k$ 次迭代结果, $C_l$ 为对图象的约束, $C_p$ 为对投影数据的约束, $R$ 为重建算子(本文采用的是 FBP 重建算法), $P_0$ 为已知投影数据, $P_m f_k$ 为估算的未知投影数据。

### 2.3 代数重建算法(ART)

从2.1节中的分析可知,变换法对投影数据的完备性要求较高。对不完全投影数据迭代法可加入各种先验知识、约束和估值,从而得到较好的重建结果。由投影数据重建图象实际上是求解下列线性代数方程:

$$\begin{cases} a_{11}f_1 + a_{12}f_2 + \dots + a_{1N}f_N = g_1 \\ a_{21}f_1 + a_{22}f_2 + \dots + a_{2N}f_N = g_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{M1}f_1 + a_{M2}f_2 + \dots + a_{MN}f_N = g_M \end{cases} \quad (6)$$

$f_i$ 为图象像素( $i=1, 2, \dots, N$ ),像素数为 $N$ 个。 $g_j$ 为投影数据( $j=1, 2, \dots, M$ ),投影数为 $M$ 个。 $a_{ij}$ 是由观测系统决定的常数。一般来说, $M$ 和 $N$ 都是很大的数。例如对一幅 $256 \times 256$ 大小的图象,在 $0^\circ \sim 180^\circ$ 范围内每 $1^\circ$ 进行一次投影,每个投影角度下有300个投影射线,这样 $N=256 \times 256=65\,536$ , $M=180 \times 300=54\,000$ ,式(6)的转移矩阵大小为 $65\,536 \times 54\,000$ ,用伪逆求解法是不现实的。有效的解决办法是用投影迭代法来求解,ART 算法就是采用这种方法:

$$F^{(k)} = F^{(k-1)} + [g_j - \sum_{i=1}^N a_{ji} f_i^{(k-1)}] / \sum_{i=1}^N a_{ji} A_j \quad (7)$$

其中 $F^{(k)}$ 表示第 $k$ 次迭代值, $F=[f_1, f_2, \dots, f_N]^T$ , $A_j=[a_{j1}, a_{j2}, \dots, a_{jN}]^T$ 。 $g_j$ 代表沿第 $j$ 条射线的投影数据。ART 方法可以直观地理解为用实际投影数据和重建图象的投影数据之差来不断修正重建图象。

## 3 ART 算法的收敛分析

在对模拟数据图象的重建中,ART 算法迭代的收敛性用2个指标来表示,一个是图象绝对误差 $E_f$ ,一个是射线和绝对误差 $E_p$ ,

$$E_f = \sum_{i=1}^N |f_i - f_i'|^2 \quad E_p = \sum_{j=1}^M |P_j - P_j'|^2 \quad (8)$$

其中 $f_i$ 为模拟图象, $f_i'$ 为重建图象, $P_j$ 为模拟投影值, $P_j'$ 为重建图象的投影值。对于完全投影数据,在迭代过程中 $E_f$ 和 $E_p$ 都趋于0。对于不完全投影数据, $E_f$ 在迭代的前几步下降很快,然后就下降得非常缓慢直至几乎不变。在考查 $E_f$ 的同时也考查 $E_p$ 就可以解释为什么会出现上述情况。 $E_p$ 在迭代的前几步也下降很快,随后稍慢,但比 $E_f$ 的下降速度快,而且经过一定迭代次数后几乎下降为0。投影

数据越少,  $E_p$  和  $E_f$  的下降速度差别越大。在 ART 算法中,  $E_f$  的改变量是由  $E_p$  的值决定的。当  $E_p$  趋于 0 时, 对重建图象的改变量也就趋于 0,  $E_f$  就不变了, 尽管这时的重建图象与原图象可能还有很大差别。造成这种现象的根本原因是投影数据不足, 投影数据相对于图象数据是不完备的。

ART 算法需要一个迭代初始值, 对完全投影数据, 不论初始值怎样取重建图象都会收敛到一个确定值。对于不完全投影数据, 初始值的选取对重建结果有较大影响。假设当初始值取得偏小时, 在迭代初期每条射线都对其穿过的像素点叠加一个正的修正量, 被多条射线穿过的点由于不断得到修正, 其值越来越大, 可能大大超过合理值。ART 迭代算法不会注意到这些异常点, 每条射线把投影误差平均地分摊到它所穿过的每个点, 而不论其中某些点的值是否不应该再增大(或减小)了。在一般情况下, 重建图象的能量大约是等于原图象的, 这些异常点对其他点会产生较大影响。

实际上对于被重建物体总是多少有一定了解, 因而就有一定的先验知识或模型。可以利用这些先验知识作为迭代初始值, 并且作为约束条件在迭代过程中加入。

#### 4 结合模拟退火(SA)的 ART 算法

根据以上对 ART 算法迭代过程的收敛分析可以看出, 对于不完全投影数据投影约束还不足以唯一确定地恢复出原信号。迭代初始值的选取对重建结果有较大影响, 而且当初始值选取不当时重建图象中可能出现奇异点。根据对图象的先验了解, 假设重建图象的相邻像素之间有一定连续性。在多个可行解中, 希望得到一个图象内像素值变化最为和缓的解。因为从统计特性上说, 这个解最符合上述的先验知识。基于上述假设, 构造一个能量函数。

$$E(f) = \sum_{i=1}^N [f_i - \bar{f}_i]^2 + \sum_{j=1}^M [P_j - P'_j]^2 \quad (9)$$

$$\bar{f}_i = \frac{1}{8} \sum_{k \in S_i} f_k$$

$S_i$  是  $i$  点的 8 邻域点, 则  $\bar{f}_i$  为  $f_i$  的 8 点邻域均值。在所有满足投影约束的解中, 求能量函数  $E(f)$  最小的解。ART 算法本身无法保证得到最小能量的解, 本文将模拟退火(simulated annealing)方法与 ART 算法相结合来解决这个问题<sup>[4]</sup>。

ART 算法中的投影约束以及其它先验知识的

约束都可以看作是一个最优化问题。在求解最优化问题时, 常常使用迭代改进算法, 该算法类似于物体中的微观重组过程。最优化问题研究的是如何使物体的能量函数达到最小。Kinkpatrick 提出将统计力学中的热平衡过程引入解决全局最优化问题中的方法, 可以有效地获得全局最优解或接近全局最优解。

设  $E[\{x_i\}]$  表示某一物质体系在微观状态  $\{x_i\}$  的内能, 对于给定的温度  $T$ , 若体系处于热平衡状态,  $\{x_i\}$  服从 Boltzman 分布。

$$f(x_i) = e^{-E[\{x_i\}]/KT} / \sum_i e^{-E[\{x_i\}]/KT}$$

温度  $T$  下降时, 内能  $E$  将随之下降, 一个宏观物体能量处于基态或接近于基态的情况是很少的, 然而在低温下系统的性质取决于基态能量, 因为当  $T$  下降时, Boltzman 分布趋近于最低能量状态。在实际应用中, 低温不一定就能得到物体基态, 为了得到基态, 应当进行仔细的退火过程。首先将物体加高温熔化, 然后缓慢地降低温度, 每个温度保持足够长的时间, 否则物体不一定得到热平衡, 得到的物体可能处于亚稳定局部最佳状态。

把重建迭代过程看作物体中的微观重组过程, 也就是对图象中像素值的调整过程。射线和约束的迭代类比于温度  $T$ 。ART 算法中射线和约束中迭代, 就好象将物体从高温到低温的迅速退火, 因此物体通常是亚稳定的, 对于重建图象来说, 就是重建速度快, 但并非最佳结果。为了得到最佳结果, 应该象退火过程那样, 缓慢下降速度, 并且在每个温度下都达到热平衡。

统计力学中的 Metropolis 抽样过程可用来在计算机上模拟某一温度  $T$  下的热平衡态, 这种方法可以接受有限的内能增大状态以使系统有可能越过能量势垒而达到全局最优解。在一定温度  $T$  下系统处于某一状态  $\{x_i\}$ , 这时对系统加上一个随机扰动  $\{\Delta x_i\}$ , 计算内能变化量

$$\Delta E = E[\{x_i + \Delta x_i\}] - E[\{x_i\}] \quad (10)$$

如果  $\Delta E < 0$ , 接受此扰动, 并将扰动后的状态作为下次扰动的初始态; 如果  $\Delta E > 0$ , 则此扰动被接受的概率为

$$P(\Delta E) = e^{-\Delta E/AT} \quad (11)$$

重复进行此过程, 系统将在此温度下达到 Boltzman 分布, 由上式可见, 当  $T$  值大时,  $P$  值也较大;  $T$  值小时,  $P$  值就较小。其物理意义就是: 高温时接受内能增大状态的概率较大。

图 1 为系统状态示意图。小球代表系统能量, 可

以在能量曲线上滚动。能量曲线有3个局部极小点和一个全局最小点,各点之间都有能量势垒。若小球只能向下滚动,则小球最终处于哪个极值点取决于小球的初始位置及各极值点的吸引范围(这也反映了初始值对重建结果的影响)。如果将系统摇一摇,可能使小球越过能量势垒由一个极值点到达另一个极值点,而且更可能使小球从高内能点(设为 $D'$ )到达低内能点(设为 $C'$ ),因为这样的能量势垒较小,反之能量势垒较大。如果摇的很轻,由 $D'$ 到 $C'$ 的概率将是由 $C'$ 到 $D'$ 的概率的几倍,最终处于 $C'$ 的概率将远大于处于 $D'$ 的概率,然而这个过程要花很长的时间,如果摇的很重,由 $D'$ 到 $C'$ 和由 $C'$ 到 $D'$ 都很容易。一个较好的折衷方案是开始剧烈地摇,然后慢慢变轻,这就兼顾了小球越过能量势垒的概率和小球最终处于 $C'$ 的概率。

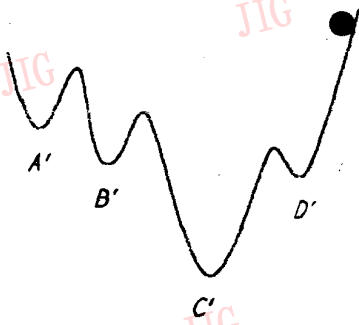


图1 系统状态示意图

从统计力学上看,当系统达到热平衡时,系统处于2个状态 $A'$ 和 $B'$ 的概率 $P_{A'}$ 和 $P_{B'}$ 唯一地由它们之间的能量差决定,而且服从 Boltzman 分布

$$P_{A'}/P_{B'} = e^{-(E_{A'} - E_{B'})/KT} \quad (12)$$

由式(11)可知,内能增大 $\Delta E$ 的状态被接受的概率 $P(\Delta E) = e^{-\Delta E/KT}$ ,当 $T$ 大时,此概率较大,这就对应于对系统摇的很剧烈,当 $T$ 小时,此概率也较小,对应于对系统摇的较轻。当 $T$ 趋于0时,由式(12)可知,系统以无限大的概率比处于能量较低的状态。

在 ART 算法中当射线和误差 $E_p$ 变得很小时,对重建图象的修正量也很小,图象几乎不变了。结合了模拟退火方法以后,当 $E_p \rightarrow 0$ 时通过产生随机扰动可使图象脱离不变态,朝内能 $E$ 下降的方向变化。单独采用模拟退火方法解决组合优化问题已有人做了一些工作<sup>[5]</sup>,目前还没有看到模拟退火与 ART 算法相结合进行图象重建的方法,根据模拟退火和 ART 的原理,在实验中采用以下步骤将这2个

方法结合起来进行图象重建。

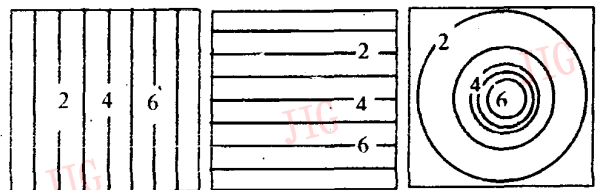
- step1: 确定图象的初始值 $f_0(i)$ ,计算 $E[f_0(i)]$ ,取起始温度;
- step2: 用 ART 算法对全部射线进行一次迭代,计算 $E[f(i)]$ ;
- step3: 产生随机扰动 $\Delta f(i)$ ,计算 $\Delta E$ ;
- step4: if( $\Delta E < 0$ ) goto step6;  
else 产生 $[0,1]$ 区间均匀分布随机数 $r$ ;
- step5: if( $e^{-\Delta E/KT} \leq r$ ) goto step3;
- step6:  $f(i) = f(i) + \Delta f(i)$ , $E = E + \Delta E$ ;
- step7: 在此温度下检验 Metropolis 抽样是否稳定,若不稳定则转至 step3;
- step8: 按某一方式降低温度, $T < T_0$ , $T = T_0$ ;
- step9: if( $T < T_c$ ) goto step10; ( $T_c$ 为退火结束温度)  
else goto step2;
- step10: end.

## 5 实验结果

对3幅大小为 $30 \times 30$ ,分别为水平方向梯度模型 $M_1$ ,垂直方向梯度模型 $M_2$ 以及高斯分布模型 $M_3$ 的图象(见图2)用上述方法进行重建。获取投影数据的几何结构是:从 $20^\circ$ 到 $160^\circ$ 每 $1^\circ$ 均匀平行投影,射线间隔为2个像素。这样获得的投影数据是严重不完全的。重建结果误差率由下式计算

$$e\% = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|f_i - \hat{f}_i|}{f_i} \times 100\% \quad (13)$$

$f_i$ 为原图象的第 $i$ 个像素, $\hat{f}_i$ 为重建图象的对应像素, $N$ 为像素总数。从表1重建结果误差率比较可以看出,结合模拟退火的 ART 算法比单独 ART 算法有更好的重建结果,而且水平梯度模型比垂直梯度模型受上述有限视角的影响较小。对于约束不完备的不完全投影数据图象重建,加入模拟退火方法可以有效地得到所需的最优解。



(a)水平梯度模型 (b)垂直梯度模型 (c)高斯模型

图2 用于重建的三种模拟数据模型

表1 重建结果误差率比较

	$M_1$	$M_2$	$M_3$
ART 方法	8.7%	14.2%	12.5%
ART 结合 SA 方法	6.1%	8.6%	7.8%

参考文献

1 柳重堪. 信号处理的数学方法. 南京: 东南大学出版社, 1992.

2 Karayiannis N B, Venetsanopoulos A N. Regulation theory in image restoration-functional approach. IEEE Trans. ASSP, 1990, 38(7): 1155.

3 Mseland E. On the comparison of interpolation method. IEEE

Tran. Med. Imaging, 1988, 7(3): 213~217.

4 Kinkpatrick S. Optimization by simulated annealing. Science, 1983, 220: 4598.

5 徐雷. 一种改进的模拟退火组合优化法. 信息与控制, 1990, 19(3): 1~7.



**孙晓安** 男, 1968 年 5 月生, 博士, 武汉大学电子信息学院副教授。主要研究领域包括: 图象处理, 计算机视觉, 计算机网络与数据库。



**吴志斌** 男, 1975 年生, 武汉大学电子信息学院硕士研究生。



**陈淑珍** 女, 1946 年生, 武汉大学电子信息学院教授, 多媒体与网络技术研究室主任。主要研究领域包括: 多媒体信息处理, 计算机图形学, 计算机网络与数据库。



**柴亚萍** 女, 1974 年生, 武汉大学电子信息学院硕士研究生。

Optimal Method in Image Reconstruction

Sun Xiaohan, Chen Shuzhen, Wu Zhibin, Chai Yaping  
 (College of Electronic Information, Wuhan University, Wuhan 430072)

**Abstract** The effect of null space of projecting data on reconstruction result is discussed. Then the convergence procedure of Algebra Reconstruction Technique (ART) and its reconstruction result for incomplete projecting data are analyzed. Simulated Annealing(SA) method in statistic physics is introduced into the iteration of ART method to deal with the problem of incomplete constraint. Based on the assumption of continuity among image pixels, constraint of most stable solution is added to get the optimal solution by means of Simulated Annealing method.

**Keywords** Null space, image reconstruction, Algebra reconstruction technique, Simulated annealing

Intel 与 PictureTel 结盟, 推动会议电视发展

Intel 与 PictureTel 注资 3050 万美元, 共同开发新的桌面视频协作产品

1999 年 1 月 19 日, Intel 公司与 PictureTel 公司联合宣布, 在产品分销与新品开发上达成合作协议, 共同促进全球会议电视市场的发展, Intel 将向 PictureTel 投资 3050 万美元。

双方将结合各自在 PC 技术革新和视频协作方面的力量, 共同针对客户不同的通讯需要开发高质量的、基于 PC 的应用方案, 并为客户提供方便快捷的全球服务和支持。双方将利用在下一代 Internet、宽带、电缆调制器、XDSL 及其它迅速发展的市场和技术领域占有的领先优势, 共同开发的新产品。双方期待此次合作能够建立更加强大、更具竞争力的会议电视产业, 通过更加广泛的渠道进行产品销售和服务。

根据双方合作意向, PictureTel 将获准分销 Intel 的 ProShare Video System500, 并独家代理 Intel TeamStation System。除专业的会议电视分销、销售和市场外, PictureTel 还将为这两个产品提供专业的服务支持, 这些 Intel 的产品更加丰富了 PictureTel 已有的群组、便携和桌面会议电视产品。

(下转 114 页)